الوحدة الأولى

(1-1) الجذور والتعبيرات الجذرية

لكل عدد حقيقي **موجب** جذران تربيعيان أحدهما **موجب** والآخر **سالب**.

أي أن إذا كان $A^2 = x$ **فإن** $A = \pm\sqrt{x}, x > 0$

لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي حقيقي واحد.

ملخص عدد الجذور الحقيقية لعدد حقيقي

العدد الحقيقي	عدد الجذور التربيعية	عدد الجذور الحقيقية التكعيبية
موجب	2	1
صفر	1	1
سالب	0	1

الجذور التربيعية Cubic Roots

إذا كان $A^3 = B$ **فإن** $A = \sqrt[3]{B}$ **وقرأ الجذر التكعيبي للعدد** B

حيث 3 **هو دليل الجذر،** B **هو المجذور**

مثال : أوجد الجذر التكعيبي لكل من الاعداد التالية دون استخدام الآلة الحاسبة

① -27

$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3}$

$= -3$

② 64

$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{(4)^3}$

$= 4$

③ $-0{,}008$

$\sqrt[3]{-0{,}008} = \sqrt[3]{\frac{-8}{10000}}$

$= \sqrt[3]{\left(\frac{-2}{10}\right)^3}$

$= \frac{-2}{10} = -0{,}2$

④ $\frac{343}{216}$

$\sqrt[3]{\frac{343}{216}} = \sqrt[3]{\left(\frac{7}{6}\right)^3} = \frac{7}{6}$

(1-1) تبسيط الجذور

تذكر

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x: x > 0 \\ 0: x = 0 \\ -x: x < 0 \end{cases}$$

حتى يكون التعبير الجذري في أبسط صورة يجب مراعاة ما يلي:

- ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر **فمثل** $\sqrt{8a^2b^7}$ ليس في أبسط صورة.
- ألا يكون المقام جذراً. **مثل** $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ليس في أبسط صورة.
- ألا يكون المجذور كسراً. **مثل** $\sqrt{\frac{4}{7}}$ ليس في أبسط صورة.
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن **مثل** $\sqrt[10]{32}$ ليس في أبسط صورة.

تستخدم القيمة المطلقة عندما يكون دليل الجذر عدداً زوجياً

Scan Me

حاول أن تحل بسط كل من التعبيرات الجذرية التالية لكل عدد حقيقي x

① $\sqrt{4x^6}$

$\sqrt{4x^6} = \sqrt{2^2 (x^3)^2} = \sqrt{(2x^3)^2}$

$|2x^3| = \begin{cases} 2x^3 & , x \geq 0 \\ -2x^3 & , x < 0 \end{cases}$

② $\sqrt[3]{8x^3} + 3x$

$= \sqrt[3]{8x^3} + 3x = \sqrt[3]{2^3 x^3} + 3x$

$= \sqrt[3]{(2x)^3} + 3x$

$= 2x + 3x = 5x$

③ $\sqrt{x^8 y^6}$

$= \sqrt{(x^4)^2 (y^3)^2} = \sqrt{(x^4y^3)^2}$

$|x^4y^3| = x^4|y^3|$

$= \begin{cases} x^4y^3 & , y \geq 0 \\ -x^4y^3 & , y < 0 \end{cases}$

④ $\sqrt{9x^2 y^4}$

$= \sqrt{(3)^2(x)^2 (y^2)^2} = \sqrt{(3xy^2)^2}$

$|3xy^2| = 3y^2|x|$

$= \begin{cases} 3xy^2 & , x \geq 0 \\ -3xy^2 & , x < 0 \end{cases}$

ملاحظة:

$5\sqrt{3}$ و $2\sqrt{3}$ تعبيران جذريان متشابهان.

$\sqrt{3}$ و $3\sqrt{5}$ هما تعبيران جذريان غير متشابهان.

جمع وطرح التعبيرات الجذرية

مثال (4): أوجد في ابسط صورة

ⓐ $3\sqrt{32} - \sqrt{98}$

$= 3\sqrt{16 \times 2} - \sqrt{49 \times 2}$

$= 3\sqrt{4^2 \times 2} - \sqrt{7^2 \times 2}$

$= 3 \times 4\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$

$= 12\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

ⓑ $2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{375}$

$= 2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{125 \times 2}$

$= 2^3\sqrt{3} + 5\sqrt[3]{5^3 \times 3}$

$= 2^3\sqrt{3} + 5 \times 5\sqrt[3]{3}$

$= 2^3\sqrt{3} + 25\sqrt[3]{3} = 27^3\sqrt{3}$

ⓒ $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$

$= \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{36 \times 2}$

$= \sqrt{3^2 \times 2} + \sqrt{5^2 \times 2} - \sqrt{6^2 \times 2}$

$= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

ⓓ $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{250}$

$= \sqrt[3]{64 \times 2} + \sqrt[3]{27 \times 2} - 2\sqrt[3]{125 \times 2}$

$= \sqrt[3]{4^3 \times 2} + \sqrt[3]{3^3 \times 2} - 2\sqrt[3]{5^3 \times 2}$

$= 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 2(5)\sqrt[3]{2}$

$= 4^3\sqrt{2} + 3^3\sqrt{3} - 20^3\sqrt{2} = -13\sqrt[3]{2}$

يمكن التحقق باستخدام الآلة الحاسبة في الجذور التربيعية

حاول أن تحل

ⓐ $4\sqrt[3]{8}+2\sqrt[3]{128}$

$=4\sqrt[3]{2^3}+2\sqrt[3]{2.64}$

$=4^3\sqrt{2^3}+2\sqrt[3]{2.(4^3)}$

$=4.2+2.4\sqrt[3]{2}$

$=8+8\sqrt[3]{2}$

ⓑ $2\sqrt{75}-\sqrt{48}$

$=2\sqrt{25.3}-\sqrt{16.3}$

$=2\sqrt{5^2.3}-\sqrt{4^2.3}$

$=2.5\sqrt{3}-\sqrt{3}$

$=10\sqrt{3}-4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

ⓒ $\sqrt{12}+\sqrt{147}-\sqrt{27}$

$=\sqrt{4.3}+\sqrt{49.3}-\sqrt{9.3}$

$=\sqrt{2^2.3}+\sqrt{7^2.3}-\sqrt{3^2.3}$

$=2\sqrt{3}+7\sqrt{3}-3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية

ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
$\forall x.y \in \mathbb{R} \cup \{0\}$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert=x$	$\sqrt[3]{x^3}=x$
$(\sqrt{x})^2=x$	$(\sqrt[3]{x})^3=x$
$\sqrt{x.y}=\sqrt{x}.\sqrt{y}$	$\sqrt[3]{x.y}=\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{y}$
$\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\quad ,y\neq 0$	$\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}\quad ,y\neq 0$

حاول أن تحل (5):

ⓐ $\sqrt{72x^3}\quad ,x\geq 0$

$=\sqrt{(6^2)(2)(x^2)(x)}$

$=\sqrt{6^2x^2}\times\sqrt{2x}$

$=6|x|\times\sqrt{2x}$

$6x\sqrt{2x}\quad x\geq 0$

ⓑ $\sqrt[3]{80n^5}$

$=\sqrt[3]{2^3(10)(n^3)(n^2)}$

$=\sqrt[3]{2^3n^3}\times\sqrt[3]{10n^2}$

$=2n\sqrt[3]{10n^2}$

ⓒ $\sqrt{50x^4}$

$=\sqrt{2(25)(x^2)^2}$

$=\sqrt{2(5^2)(x^2)^2}$

$=\sqrt{2(5x^2)^2}$

$=|5x^2|\sqrt{2}=5x^2\sqrt{2}$

ⓓ $\sqrt[3]{18x^3}$

$\sqrt[3]{18x^3}=\sqrt{18}x$

Scan Me

حاول أن تحل (6):

ⓐ $3\sqrt{7x^3} \cdot 2\sqrt{x^3y^2}$

$= 6\sqrt{7x^3 \cdot x^3y^2}$

$= 6\sqrt{7(x^3y)^2}$

$= |6\sqrt{7}\, x^3y|$

$= 6\sqrt{7}\, x^2|xy|$

$x \geq 0$

ⓑ $4\sqrt[3]{x^4y} \times 3\sqrt[3]{x^2y}$

$= 4 \times 3\sqrt[3]{(x^4y)(x^2y)}$

$= 12\sqrt[3]{(x^2)^3(y^2)}$

$= 12x^2\sqrt[3]{y^2}$

حاول أن تحل (6):

ⓐ $\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{27}}$

$= \sqrt{\frac{243}{27}}$

$= \sqrt{9} = 3$

ⓑ $\frac{\sqrt{12x^4}}{\sqrt{3x}}$

$= \sqrt{\frac{12x^4}{3x}}$

$= \sqrt{4x^3}$

$= \sqrt{2^2 . x^2 . x}$

$= |2x\sqrt{x}|$

$= 2x\sqrt{x}$ $\quad x > 0$

ⓒ $\frac{\sqrt[3]{128x^{15}}}{\sqrt[3]{2x^3}}$

$= \sqrt[3]{\frac{128x^{15}}{2x^3}}$

$= \sqrt[3]{64x^{12}}$

$= \sqrt[3]{(4x^4)^3}$

$= 4x^4$

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذراً

يمكن إعادة كتابة كسر مقامه يحتوي على جذور تربيعية أو تكعيبية على شكل كسر مقامه عدد نسبي وذلك بضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام.

حاول أن تحل (تمارين) أوجد ناتج كل من التعبيرات التالية في أبسط صورة

① $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^2+\sqrt{6}}{(\sqrt{3})^2}$

$= \frac{3+\sqrt{6}}{3}$

ⓑ $\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$= \frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{6+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2}{(2)^2-(\sqrt{2})^2}$

$= \frac{6+\sqrt{2}-2}{4-2} = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$

③ $\frac{3}{\sqrt[3]{7^2}}$

$= \frac{3}{\sqrt[3]{7^2}} \times \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{3\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{3\sqrt[3]{7}}{7}$

④ $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$

$= \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{5}\ \frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$

Scan Me

حاول أن تحل أوجد ناتج كل من التعبيرات التالية في أبسط صورة

① $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9\sqrt{x}}$, $x > 1$, $x \in Q$

$$\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}+9\sqrt{x}}{\sqrt{x}+9\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}+9x\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2+9x}{(\sqrt{x})^2-(9x)^2}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}+9x\sqrt{x}+X+9x}{x-81x^2}$$

$$= \frac{10x\sqrt{x}+X+9x}{x-81x}$$

② $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, $x \epsilon z^+$, $x \neq 1$

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x})^2-1}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$$

حاول أن تحل أوجد قيمة $x^2 - 6$ إذا كان $x = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$

$$x = \frac{4}{\sqrt{5}-1} \times \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{4} = \sqrt{5}+1$$

$$\Rightarrow x^2 - 6 = (\sqrt{5}+1)^2 - 6$$

$$= (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1 - 6$$

$$= 5 + 2\sqrt{5} + 1 - 6 = 2\sqrt{5}$$

حاول أن تحل أكتب كلا مما يلي بحيث يكون المقام عدد نسبياً

① $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} - (9 - 4\sqrt{5})$

$$= \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} \times \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} - (9 - 4\sqrt{5})$$

$$= \frac{5-2\sqrt{5}-2\sqrt{5}+4}{(\sqrt{5})^2-(2)^2} \times \frac{9-4\sqrt{5}}{5-4} - (9 - 4\sqrt{5})$$

$$= 9 - 4\sqrt{5} - 9 + 4\sqrt{5} = 0$$

② $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})-\sqrt{2}(3-\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}+2}{(3)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{4}{9-2} = \frac{4}{7}$$

Scan Me