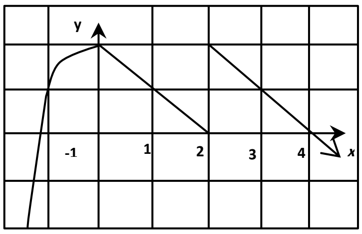
(1-1) النهايات

نظرية(1)

بفرض أن L ، C عددين حقيقيين يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c اذا وفقط اذا كانت .

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

حاول أن تحل (1)



يمثل الشكل المقابل بيان الدالة f .

أوجد إن أمكن :

(a) $\lim_{x \to -1} f(x) = 1$	(b) $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$
$\lim_{x \to 2} f(x)$ (c) غير موجودة	(d) $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$

نظرية(2)

إذا كانت f دالة : $f(x) = k$ وكانا c ، k عددان حقيقيان فإن : $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$

نظرية(3)

إذا كانت f دالة : $f(x) = k$ وكانا c ، k عددان حقيقيان فإن : $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$

نظرية(4)

إذا كانت k, C, M, L أعداد حقيقية $\lim_{x \to c} g(x) = M$. $\lim_{x \to c} f(x) = L$ فإن:

(a) قاعدة الجمع: $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L + M$

(b) قاعدة الطرح: $\lim_{x \to c}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L - M$

(c) قاعدة الضرب: $\lim_{x \to c}(f(x).g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) . \lim_{x \to c} g(x) = L.M$

(d) قاعدة الضرب في ثابت: $\lim_{x \to c}(K.f(x)) = K. \lim_{x \longrightarrow c} f(x) = K.L$

(e) قاعدة القسمة:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \frac{L}{M} \ . M \neq 0$$

Scan Me

حاول أن تحل (2)

بفرض أن : $\lim_{x \to 2} g(x) = -3$ ، $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ أوجد:

(a) $\lim_{x \to 2}(f(x) + g(x))$ (b) $\lim_{x \to 2}(f(x) . g(x))$ (c) $\lim_{x \to 2}\left(\frac{8f(x) . g(x)}{f(x) + g(x)}\right)$

الحل

(a) $\lim_{x \to 2}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x) = 7 + -3 = 4$

(b) $\lim_{x \to 2}(f(x). g(x)) = \lim_{x \to 2} f(x) . \lim_{x \to 2} g(x) = 7 . -3 = -12$

(c) $\lim_{x \to 2}\left(\frac{8f(x) . g(x)}{f(x) + g(x)}\right) = \lim_{x \to 2}(f(x). g(x))$

نهاية المقام:

$\lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x)$

$= 7 + -3 = 4 \neq 0$

$\frac{\lim_{x\to2}(8f(x) . g(x))}{\lim_{x\to2}(f(x) + g(x))} = \frac{\lim_{x\to2}(8f(x) . g(x))}{\lim_{x\to2}(f(x) + g(x))}$

$\frac{\cancel{8}^{2}(7)(-3)}{4} = -42$

نظرية(5)

دوال كثيرات الحدود النسبية

(a) إذا كانت $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_a$ دالة كثيرة الحدود ، C عدداً حقيقياً ، فإن:

$$\lim_{x \to c}(f(x) + f(c)) = a_n c^n \; a_{n-1} \, c^{n-1} + ... + a_a$$

(b) إذا كانت $f(x). g(x)$ كثيرتي حدود ، c عدداً حقيقياً ، فإن:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \; . g(c) \neq 0$$

مثال (3) أوجد ان أمكن: $\lim_{x \to c} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 3}$

الحل

$$= \frac{\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4)}{\lim_{x \to 2}(x + 3)}$$

$$= \frac{(2)^2 + 2(2) + 4}{5} = \frac{12}{5} \qquad \neq 0$$

نهاية المقام: $\lim_{x \to 2}(x + 3) = 2 + 3 = 5$
$\neq 0$

حاول ان تحل (3) (b) أوجد

① $\lim_{x\to1}(x^3+3x^2-2x-17)$

الحل

الحل بالتعويض :

$$\lim_{x\to1}(x^3+3x^2-2x-17)$$
$$=(1)^3+3(1)^2-2(1)-17=-15$$

② $\lim_{x\to2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$

نهاية المقام

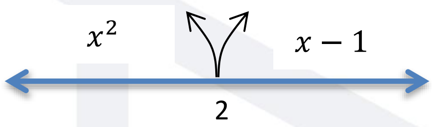
$$\lim_{x\to2}(x+2)$$
$$=2+2$$
$$=4\neq0$$

$$\frac{(2)^2+5(2)+6}{2+2}$$
$$=5$$

حاول أن تحل (4)

إذا كانت الدالة f:

$$f(x)\begin{cases} x^2-3 : x<2 & \text{يسار} \\ x-1 : x>2 & \text{يمين} \end{cases}$$



الحل

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to2}f(x)$

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(x^2-3)$$
$$=(2)^2-3=1$$
$$\therefore \lim_{x\to2}f(x)=1$$

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}(x-1)$$
$$=2-1=1$$
$$\therefore \lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}=1$$

حاول أن تحل (5)

إذا كانت الدالة g :

$$f(x)\begin{cases} x^3+x & x>1 \quad \text{يمين} \\ \frac{x}{x^2+1} & x\leq1 \quad \text{يسار} \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to1}g(x)$

الحل

اليسار	اليمين
$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2+1}$	$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3 + x)$ $= (1)^3 + 1 = 2$

نهاية المقام:

$$\lim_{x \to 1^-} (x^2+1) = (1)^2 + 1 = 2 \neq 0$$

$$\frac{\lim_{x\to1^-} x}{\lim_{x\to1^-}(x^2+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \to 1^-} g(x) \neq \lim_{x \to 1^+} g(x) \to \lim_{x \to 1} g(x)$$ غير موجودة

حاول أن تحل (6) لتكن $f(x) = x^2 - |x+2|$,

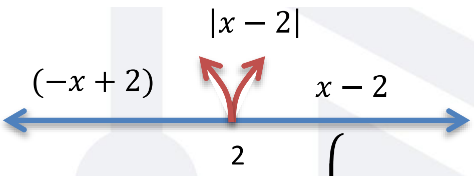
(a) اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

(b) أوجد: $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ ، $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

(c) هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

الحل

اعادة تعريف المطلق



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + (-x+2) & : \ x < 2 \quad \text{يسار} \\ x^2 - (x+2) & : \ x > 2 \quad \text{يمين} \end{cases}$$

اليمين	اليسار
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - (-x+2))$ $= (2)^2 - (-(2)+2) = 4$	$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - (x-2))$ $= (2)^2 - (2-2) = 4$

$$\therefore \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4 \qquad \therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

حاول أن تحل (6)

(a) $f(x)=\begin{cases} x^2-(x+2) & : x\geq -2 \\ x^2+(x+2) & : x<-2 \end{cases}$

$f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & : x\geq -2 \\ x^2+x+2 & : x<-2 \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}(x^2-x-2)$

$=(-2)^2-(-2)-2 = 4$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}(x^2+x+2)$

$=(-2)^2+(-2)+2 = 4$

(c) $\because \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 4$

$=(-2)^2+(-2)+2 = 4$

نظرية (6)

بفرض أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

(a) $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)^n$

(b) $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن يكون c>0)

(c) $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x)>0$)

أوجد أن أمكن $\lim\limits_{x\to 4}(x+\sqrt{x})^4$

الحل

الجذر تحت ما نهاية $\lim\limits_{x\to 4} x = 4 > 0$

$\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 4} x} = \sqrt{4} = 2$

الجذر نهاية

$=\left[\lim\limits_{x\to 4}(x+\sqrt{x})\right]^4$

$=\left[\lim\limits_{x\to 4} x + \lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}\right]^4$

$=[4+2]^4 = 1296$